Kalkulation

Mit $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$ gleich Anzahl der Nüsse am Empfang.

Das erste Murmeli kommt und nimmt $\frac{\boldsymbol{n}-1}{3}$ Nüsse. Es lässt $\frac{\boldsymbol{n}-1}{3} * 2$ Nüsse zurück. Wenn das nächste Murmeli kommt, findet es $\frac{\boldsymbol{n}-1}{3} * 2$ Nüsse.

Es nimmt dann $\frac{\frac{2\boldsymbol{n}-2}{3} - 1}{3}$ Nüsse und lässt $\frac{2\boldsymbol{n}-5}{9} * 2$ zurück. Dann kommt das letzte Murmeli und findet $\frac{4\boldsymbol{n}-10}{9}$ Nüsse und nimmt $\frac{\frac{4\boldsymbol{n}-10}{9}-1}{3}$ und lässt $\frac{4\boldsymbol{n}-19}{27} * 2$ zurück.

Am nächsten Tag, als die drei Murmeli kommen, um die Nüsse zu verteilen, finden sie $\frac{8\boldsymbol{n}-38}{27}$ Nüsse. Dann hat jedes $\frac{\frac{8\boldsymbol{n}-38}{27}-1}{3}$ bekommen.

Wir haben dann $\frac{8\boldsymbol{n}-65}{81} = \boldsymbol{y}$, mit $\boldsymbol{y} \in \mathbb{N}$ Anzahl der Nüsse der letzten Verteilung.

Dies sieht wie eine diophantische Gleichung aus:

$$\frac{8\boldsymbol{n} - 65}{81} = \boldsymbol{y}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{81\boldsymbol{y} + 65}{8} = \boldsymbol{n}$$

Hier können wir einfach lösen mit modulo, da $65 \bmod 8 \equiv 1$.

Deshalb muss $81 * \boldsymbol{y} \bmod 8 \equiv 7$ sein, unter der Annahme, dass $\frac{81*\boldsymbol{y}+65}{8} \in \mathbb{N}$.

Wir wissen, dass $81 \bmod 8 \equiv 1$

Da $\boldsymbol{k}$ ist, muss $\boldsymbol{y} \bmod 8 \equiv 7$ sein. Deshalb können wir sagen, dass $\boldsymbol{y} = 8 * \boldsymbol{k} + 7$ ist mit $\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}$, und $\boldsymbol{y}$ funktion von $\boldsymbol{k}$.

Wir können somit sagen:

$65 \bmod 8 \equiv 1$ „plus“ $81 \bmod 8 \equiv 1$ „mal“ $\boldsymbol{y} \bmod 8 \equiv 7$ „gleich“ $(81\boldsymbol{y} + 65) \bmod 8 \equiv 0$

Reformuliert: $1 + 1 * 7 = 8$, stimmt !

Am Ende haben wir: $\boldsymbol{y} = 8 * \boldsymbol{k} + 7$ und $\frac{81\boldsymbol{y}+65}{8} = \boldsymbol{n}$

Lösung

Wir finden mindestens 79 Nüsse ganz zu Beginn auf dem Haufen der Murmeltiere.

Das ergibt sich so:

Logischerweise finden wir: $\frac{81*(8\boldsymbol{k}+7\,)+65}{8} = \boldsymbol{n}$ dann $\frac{648\boldsymbol{k}+567+65}{8} = \boldsymbol{n} \quad \Leftrightarrow \frac{648\boldsymbol{k}+632}{8} =$ $\boldsymbol{n}$ logischerweise: $\frac{648}{8} = 81$ und $\frac{632}{8} = 79 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{n} = \mathbf{81}\boldsymbol{k} + \mathbf{79}$

Jetzt haben wir eine Formel, die alle Lösungen von $\boldsymbol{n}$ angibt mi $\boldsymbol{k} =$ 1t, dann $\boldsymbol{k} =$ 2, usw...
($\boldsymbol{n}$ *funktion von* $\boldsymbol{k}$)

Jetzt, können wir berechnen:

Mit $\boldsymbol{k} =$ 0 also, $\boldsymbol{n} = 81k + 79 = \mathbf{79}$**,** das ist die kleineste Anzahl der Nüsse möglich für eine solche Verteilung.

Um zu lösen, wieviel Nüsse jedes Murmeli für seinen Winterspeckvorrat hat, schlagen wir folgende Vorgehensweise vor:

Die Anzahl der Nüsse, wenn jedes Murmeli seinen Teil nimmt, plus der Nuss, die es isst, zuzüglich der letzten Verteilung ($\boldsymbol{y}$)

<u>Die erste Murmeli :</u>

$$\frac{\boldsymbol{n}-1}{3} + \boldsymbol{y} + 1 = \frac{81\boldsymbol{k}+79-1}{3} + 8\boldsymbol{k} + 8 = 27\boldsymbol{k} + 8\boldsymbol{k} + 26 + 8 = \mathbf{35}\boldsymbol{k} + \mathbf{34}$$

<u>Die zweite Murmeli :</u>

$$\frac{2\boldsymbol{n}-5}{9} + \boldsymbol{y} + 1 = \frac{2*(81\boldsymbol{k}+79)-5}{9} + 8\boldsymbol{k} + 8 = 18\boldsymbol{k} + 8\boldsymbol{k} + 17 + 8 = \mathbf{26}\boldsymbol{k} + \mathbf{25}$$

<u>Die dritte Murmeli :</u>

$$\frac{4\boldsymbol{n}-19}{27} + \boldsymbol{y} + 1 = \frac{4*(81\boldsymbol{k}+79)-19}{27} + 8\boldsymbol{k} + 8 = 12\boldsymbol{k} + 8\boldsymbol{k} + 11 + 8 = \mathbf{20}\boldsymbol{k} + \mathbf{19}$$

Dann haben die Murmeli in der folgenden Reihenfolge: 34, 25 und 19 Nüsse (dies gilt nur für $\boldsymbol{k} = 0$) [und der Vogel bekommt die letzte Nuss].

Kontrolle:

$34 + 25 + 19 + 1 = \mathbf{79}$, **stimmt !**

Zusatzaufgabe:

Die Nusszahl = $\boldsymbol{n}$ zu Beginn. Wir finden für die 1., 2. …, $\boldsymbol{x}$ Möglichkeit, dass man einfach die Funktion $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x-1})$= $\mathbf{81}(\boldsymbol{x-1}) + \mathbf{79}$ nehmen kann [$\boldsymbol{x-1}$, weil es die erste Möglichkeit ist, wenn $\boldsymbol{k} = 0$, die zweite, wenn $\boldsymbol{k} = 1$, usw…].